Určité integrály

Přehled užitečných vztahů:

- Newton-Leibnizova formule: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
- Obsah podgrafu funkce f: $\displaystyle S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- Objem rotačního tělesa vzniklého rotací podgrafu funkce f kolem osy x: $\displaystyle V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$
- Obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací podgrafu funkce f kolem osy x:

  $$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$
- Délka rovinné křivky, která je grafem funkce f: $\displaystyle l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$
- Délka křivky v $\mathbb{R}^n$, která je dána parametricky jako n-tice funkcí $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$:

  $$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2 + \cdots + \dot{x}_n(t)^2}\,\mathrm{d}t,$$ kde tečka nad písmenem značí derivaci podle t

Výpočet určitého integrálu:

1. Vypočtěte $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$. [3]
2. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$. [0]
3. Vypočtěte $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. $\left[\frac{\pi}{4} + \arctan 2\right]$
4. Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x-1)\sin x\,\mathrm{d}x$. $[\pi]$
5. Vypočtěte $\displaystyle\int_1^0 -x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. $\left[\frac{1}{3}\right]$
6. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^2 x}{\sqrt[4]{1+\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$. $\left[\frac{4}{9}(\sqrt[4]{8} - 1)\right]$
7. Vypočtěte $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{x^5}\,\mathrm{d}x$. $\left[\frac{1}{2}\right]$
8. Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. $[\pi]$
9. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. $\left[\frac{1}{2}\right]$
10. Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. [0]

Obsah rovinného obrazce:

1. Určete obsah obrazce, který je ohraničen jedním obloukem sinusoidy $y = \sin x$ a osou x. [2]
2. Určete obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 - 5x + 6$ a osou x. $\left[\frac{1}{6}\right]$
3. Vypočtěte obsah kruhu o poloměru R. $[\pi R^2]$
4. Vypočtěte obsah elipsy s poloosami a a b. $[\pi ab]$
5. Určete obsah obrazce ohraničeného přímkami $y = 0, x = 1, x = 5$ a grafem funkce $y = \frac{1}{x}$. $[\ln 5]$
6. Určete obsah obrazce ohraničeného křivkou $y = 0{,}5x^2$ a přímkou $y = x + 4$. [18]
7. Určete obsah obrazce omezeného kubickou parabolou $y = x^3$ a přímkou $y = x$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

8. Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkami $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ a $y = 1$. $\left[\frac{2}{3}\right]$

9. Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkami $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$ a $x = 2$. $\left[\frac{1}{2} + \ln 2\right]$

Objemy rotačních těles

1. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vzniklo rotací obrazce omezeného křivkami $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$ a $x = 2$ kolem osy x. $\left[\frac{5}{6}\pi\right]$

2. Vypočtěte objem koule o poloměru R. $\left[\frac{4}{3}\pi R^3\right]$

3. Určete objem kužele o poloměru podstavy R a výšce h. $\left[\frac{1}{3}\pi R^2 h\right]$

4. Určete objem rotačního elipsoidu vzniklého rotací elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kolem hlavní osy. $\left[\frac{4}{3}\pi ab^2\right]$

5. Určete objem rotačního paraboloidu o poloměru podstavy $r = 3$ a výšce $v = 9$. $[40{,}5\pi]$

6. Jaký je objem tělesa vzniklého rotací podgrafu funkce $y = \sin x$ v intervalu $\langle 0; \pi\rangle$ kolem osy x? $\left[\frac{\pi^2}{2}\right]$

7. Jaký je objem tělesa vzniklého rotací podgrafu funkce $y = x^{-2}$ v intervalu $\langle 1; \infty)$ kolem osy x? $\left[\frac{\pi}{3}\right]$

Povrchy plášťů rotačních těles

1. Určete povrch koule o poloměru R. $\left[4\pi R^2\right]$

2. Určete povrch pláště kužele o poloměru podstavy R a výšce h. [πRs, kde $s = \sqrt{h^2 + R^2}$ je strana kužele]

3. Vypočtěte povrch pláště komolého rotačního kužele, který vznikne rotací přímky $y = 3 - x$ v intervalu $\langle -1; 2\rangle$ kolem osy x. $\left[15\sqrt{2}\pi\right]$

4. Vypočtěte povrch pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $y = x^3$ v intervalu $\langle 1; 3\rangle$ kolem osy x. $\left[\frac{\pi}{27}\left(730\sqrt{730} - 10\sqrt{10}\right)\right]$

5. Vypočtěte povrch pláště rotačního paraboloidu, který vznikne rotací grafu funkce $y = \sqrt{x}$ v intervalu $\langle 0; 2\rangle$ kolem osy x. $\left[\frac{13}{3}\pi\right]$

Délky křivek:

Poznámka: Výpočet délky křivky nebývá jednoduchý. Příslušný integrál často není elementární funkcí, což nastává kupř. při počítání délky elipsy.

1. Vypočtěte délku kružnice o poloměru R. $[2\pi R]$

2. Vypočtěte délku elipsy s poloosami a a b. [výsledek není možné vyjádřit elementárními funkcemi]

3. Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky, která je grafem funkce $y = x^{\frac{3}{2}}$ v intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Jedná se o část tzv. semikubické (Neilovy) paraboly. $\left[\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right)\right]$

4. Vypočtěte délku oblouku paraboly $y = x^2$ v intervalu $\langle 0; 1\rangle$. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{5} - 2)\right]$

5. Vypočtěte délku exponenciály $y = e^x$ v intervalu $\langle 0; 2\rangle$. $\left[-\sqrt{2} + \sqrt{1 + e^4} + \operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctanh}\frac{1}{\sqrt{1+e^4}}\right]$

6. Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky, která je grafem funkce $y = \ln\cos x$ v intervalu $\left\langle 0; \frac{\pi}{3}\right\rangle$. $\left[\ln(\sqrt{3} + 2)\right]$

7. Vypočítejte délku jednoho závitu šroubovice $(R\cos t; R\sin t; at)$. $\left[2\pi\sqrt{R^2 + a^2}\right]$

Několik úloh z fyziky:

1. Jakou vzdálenost urazí těleso mezi časy $t_1 = 0\,\mathrm{s}$ a $t_2 = 5\,\mathrm{s}$, závisí-li jeho rychlost v v metrech za sekundu na čase t v sekundách vztahem $v(t) = 2t^2 + t$? $[95{,}8\,\mathrm{m}]$

2. Vypočtěte práci plynu při jeho izotermické expanzi z objemu V_1 na objem V_2. $\left[nRT\ln\frac{V_2}{V_1}\right]$

3. Vypočtěte práci, kterou musíme vykonat při vynesení družice o hmotnosti 500 kg z povrchu Země na orbitu ve výšce 20 000 km nad zemským povrchem. Použijte Newtonův gravitační zákon. Hmotnost Země $M_Z \approx 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. $\left[2{,}38 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}\right]$